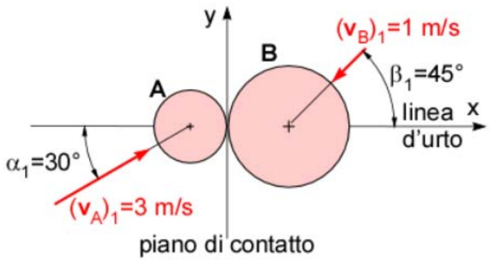
Meccanica applicata alle macchine

Massimo Callegari, Pietro Fanghella e Francesco Pellicano

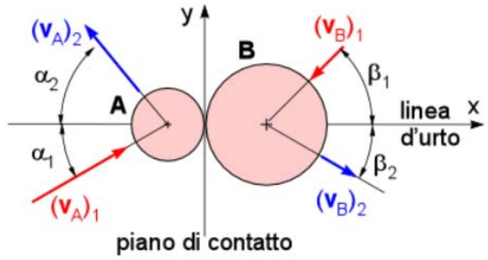
Ed.: De Agostini

Esercizio 3.13

Due dischi lisci A e B di massa m_A=*1 kg* e m_B=*2 kg* rispettivamente entrano in collisione con le velocità iniziali rappresentate in figura. Se il coefficiente di restituzione vale *e=0,75,* determinare le velocità dei 2 dischi subito dopo l'urto.



Svolgimento



Come visto nella sezione 3.8, si tratta di un **urto centrale, obliquo, anelastico**. Le 4 equazioni risolventi in questo caso sono fornite da:

- conservazione della quantità di moto del sistema *lungo la linea d'urto*:

$$-m_A(v_A)_2\cos\alpha_2 + m_B(v_B)_2\cos\beta_2 = m_A(v_A)_1\cos\alpha_1 - m_B(v_B)_1\cos\beta_1 \qquad (1)$$

- applicazione dell'appropriato coefficiente di restituzione *lungo la linea d'urto*;

$$\frac{(v_B)_2\cos\beta_2 + (v_A)_2\cos\alpha_2}{(v_A)_1\cos\alpha_1 + (v_B)_1\cos\beta_1} = e = 0{,}75 \qquad (2)$$

- conservazione della quantità di moto di entrambe le particelle *lungo la direzione normale alla linea d'urto*:

$$m_A(v_A)_2 \,\mathrm{sen}\,\alpha_2 = m_A(v_A)_1 \,\mathrm{sen}\,\alpha_1 \tag{3}$$
$$m_B(v_B)_2 \,\mathrm{sen}\,\beta_2 = m_B(v_B)_1 \,\mathrm{sen}\,\beta_1 \tag{4}$$

Sostituendo i dati noti nelle (1-4) si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} -(v_A)_2 \cos\alpha_2 + 2(v_B)_2 \cos\beta_2 = \dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2} \\ (v_B)_2 \cos\beta_2 + (v_A)_2 \cos\alpha_2 = \dfrac{3}{8}\left(3\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) \\ (v_A)_2 \,\mathrm{sen}\,\alpha_2 = \dfrac{3}{2} \\ (v_B)_2 \,\mathrm{sen}\,\beta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \tag{5}$$

Sommando le prime 2 equazioni in (5) e considerando il risultato insieme alla quarta si ottiene:

$$\begin{cases} (v_B)_2 \cos\beta_2 = \dfrac{21\sqrt{3}-5\sqrt{2}}{24} \\ (v_B)_2 \,\mathrm{sen}\,\beta_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \tag{6}$$

e quindi:

$$\begin{cases} (v_B)_2 = \sqrt{\dfrac{1}{2} + \dfrac{\left(21\sqrt{3}-5\sqrt{2}\right)^2}{24^2}} = 1{,}41\,\mathrm{m/s} \\ \beta_2 = \arctan\left(\dfrac{12\sqrt{2}}{21\sqrt{3}-5\sqrt{2}}\right) = 0{,}52\,\mathrm{rad} = 30{,}08° \end{cases} \tag{7}$$

In modo analogo sottraendo il doppio della seconda equazione dalla prima in (5) e considerando il risultato insieme alla terza si ottiene:

$$\begin{cases} (v_A)_2 \cos\alpha_2 = \dfrac{3\sqrt{3}+7\sqrt{2}}{12} \\ (v_A)_2 \,\mathrm{sen}\,\alpha_2 = \dfrac{3}{2} \end{cases} \tag{8}$$

e quindi:

$$\begin{cases} (v_A)_2 = \sqrt{\dfrac{9}{4} + \dfrac{\left(3\sqrt{3} + 7\sqrt{2}\right)^2}{12^2}} = 1{,}96 \text{ m/s} \\ \alpha_2 = \arctan\left(\dfrac{18}{3\sqrt{3} + 7\sqrt{2}}\right) = 0{,}87 \text{ rad} = 50{,}02° \end{cases} \tag{9}$$

Le velocità ricavate si possono esprimere anche tramite le loro componenti cartesiane:

$$\begin{cases} (v_{Ax})_2 = -1{,}26 \text{ m/s} \\ (v_{Ay})_2 = 1{,}50 \text{ m/s} \\ (v_{Bx})_2 = 1{,}22 \text{ m/s} \\ (v_{By})_2 = -0{,}71 \text{ m/s} \end{cases} \tag{10}$$